

Московский государственный университет имени М.В.  
Ломоносова

Физический факультет  
Кафедра физики частиц и космологии

## Курсовая работа

Слабое линзирование  
на темных гало Галактики

Студент 207 группы  
Неделько Никита Сергеевич

Научный руководитель  
член-корр. РАН, доктор физ.-  
мат. наук, Горбунов Дмитрий  
Сергеевич

Москва, 2018.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>1 Гравитационное линзирование</b>	<b>3</b>
1.1 Уравнение линзы . . . . .	3
1.2 Линзирующий потенциал . . . . .	4
1.3 Аксиально симметричные линзы . . . . .	5
1.4 Изображения . . . . .	5
<b>2 Темная материя в Галактике</b>	<b>7</b>
2.1 Профиль Наварро-Френка-Уайта . . . . .	7
2.2 Темные гало . . . . .	8
<b>3 Оценка смещения изображений</b>	<b>9</b>
<b>4 Заключение</b>	<b>11</b>

# Введение

Гравитационное линзирование - явление отклонения электромагнитных волн под действием гравитационного поля. Первое теоретическое описание гравитационного линзирования возникло в конце XVIII - начале XIX века с появлением корпускулярной теории света и основывалось на ньютоновской теории гравитации, рассматривая отклонение лучей как гиперболическое движение фотонов в поле тяготения. Полученное таким способом значение угла отклонения, однако, составляет лишь половину от истинного, поскольку не учитывает искривление пространства [10]. Экспериментальное наблюдение Эддингтоном линзирования Солнцем звезд во время затмения, давшее именно удвоенный угол, стало одним из самых убедительных доказательств верности теории относительности.

С начала XX века, когда появились достаточно точные инструменты наблюдения, астрономы обнаруживали расхождение между теоретическими кривыми вращения галактик, полученными на основе распределения звезд, и наблюдательными данными. Существует несколько гипотез, объясняющих это явление, но наиболее эффективной с 80-х годов [6] является гипотеза темной материи - небарионного вещества, отвечающую за большую часть массы Вселенной. Предполагается, что темная материя состоит из массивных частиц, участвующих только в гравитационном и слабом (либо еще каком-то более слабом) взаимодействиях (Weakly Interacting Massive Particles, WIMP). Поскольку WIMP не взаимодействуют с электромагнитным излучением непосредственно, прямое наблюдение темной материи невозможно. Предлагается множество косвенных методов наблюдения, включая поиск излучения, образующегося при аннигиляции частиц темной материи [2], но наиболее точным методом изучения распределения темной материи на сегодняшний день является исследование ее гравитационного поля. Современные компьютерные симуляции предсказывают наличие у гало галактик внутренней структуры и неоднородностей плотности. Одним из способов проверки этих гипотез является анализ гравитационного линзирования объектов фона [11]. В работе оценивается возможность обнаружения такого линзирования в данных обзоров неба.

# 1 Гравитационное линзирование

## 1.1 Уравнение линзы

Общая теория относительности дает значение угла отклонения для точечной массы  $M$

$$|\hat{\alpha}| = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (1.1.1)$$

где  $R$  - расстояние от массы в плоскости линзы, параллельной плоскости наблюдения. Поскольку  $\hat{\alpha}$  линейно зависит от  $R$ , угол отклонения системы точечных масс является линейной суперпозицией углов отклонения для каждой точки.

В случае астрономических объектов, в особенности на галактических масштабах, когда линейные размеры системы **Наблюдатель-Линза-Источник** много больше размеров линзы, можно перейти к приближению тонкой линзы, заменив объемную плотность  $\rho(\vec{\xi})$  на поверхностную плотность  $\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz$ , где  $\vec{\xi}$  - вектор в плоскости линзы  $\mathbf{L}$ , перпендикулярной лучу **Наблюдатель-Линза**.

Определим теперь источник, имеющий радиус-вектор  $\vec{\eta}$  в плоскости источника  $\mathbf{S}$ , параллельной  $\mathbf{L}$ . Луч, испущенный этим источником и пересекающий  $\mathbf{L}$  в  $\vec{\xi}$ , отклонится на угол

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2 \xi'$$

Обозначим расстояния от наблюдателя до  $\mathbf{L}$ , от наблюдателя до  $\mathbf{S}$  и от  $\mathbf{L}$  до  $\mathbf{S}$  как  $D_L$ ,  $D_S$  и  $D_{LS}$  соответственно. Введем соответствующие  $\xi$  и  $\eta$  углы  $\theta$  и  $\beta$ , отсчитываемые от луча **Наблюдатель-Линза** (1). Считая углы малыми (что правомерно для рассматриваемых систем), получаем *уравнение линзы*:

$$\vec{\theta} D_S = \vec{\beta} D_S + \hat{\alpha} D_{LS}. \quad (1.1.2)$$

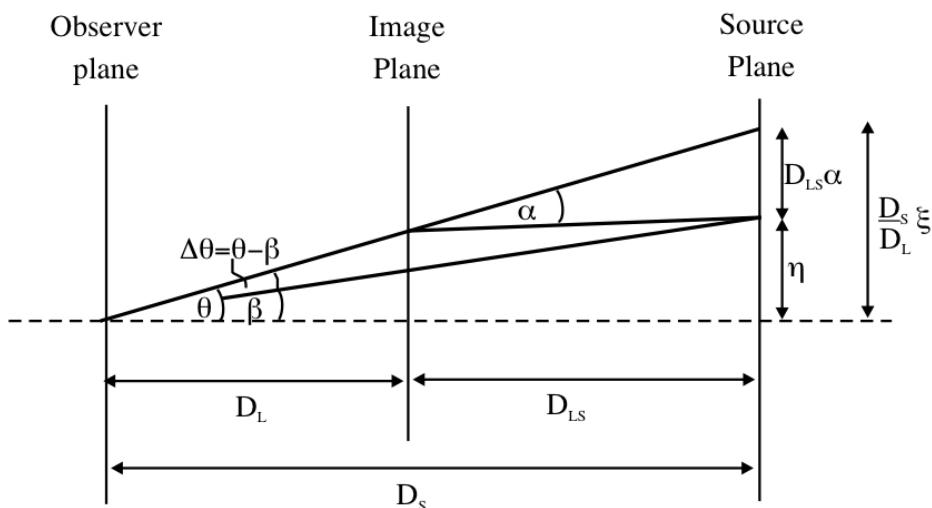


Рис. 1: Геометрическая схема линзирования в приближении плоской линзы

Перейдя к приведенному углу отклонения

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\vec{\alpha}}(\vec{\theta}),$$

получаем

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (1.1.3)$$

Вычисления, однако, удобнее всего вести в безразмерной форме. Нормируем вектор  $\vec{\xi}$  на некоторый масштаб  $\xi_0$ :  $\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}$ . Аналогично,  $\vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\eta_0}$ , где  $\eta_0 = \frac{\xi_0 D_S}{D_L}$ . Приведенный угол отклонения в новых обозначениях имеет вид

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\vec{\alpha}}(\xi_0 \vec{x}) \quad (1.1.4)$$

Наконец, безразмерное уравнение линзы имеет вид

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) \quad (1.1.5)$$

## 1.2 Линзирующий потенциал

Для описания протяженных линз введем понятие потенциала линзирования как нормированной проекции ньютоновского гравитационного потенциала системы на плоскость  $\mathbf{L}$ :

$$\hat{\Psi} = \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_L \vec{\theta}, z) dz \quad (1.2.1)$$

и его безразмерную версию

$$\Psi = \frac{D_L^2}{\xi_0^2} \hat{\Psi} \quad (1.2.2)$$

$\Psi$  обладает несколькими свойствами:

- (1) его градиент равен приведенному углу отклонения:  $\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{x})$
- (2) его лаплассиан равен  $\Delta_x \Psi(\vec{x}) = 2k(\vec{x})$ , где

$$k(\vec{x}) \equiv \frac{\Sigma(\vec{x})}{\Sigma_{cr}} \quad (1.2.3)$$

- сходимость (безразмерная поверхностная плотность),

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}} \quad (1.2.4)$$

- критическая поверхностная плотность, являющаяся характеристикой системы.

### 1.3 Аксиально симметричные линзы

Рассмотрим класс линз, распределение массы в которых симметрично относительно оси **Наблюдатель-Линза**. В таком случае  $\Sigma(\vec{\xi}) = \Sigma(|\vec{\xi}|)$ . Разбив вектор  $\vec{\xi} - \vec{\xi}'$  на параллельную и ортогональную относительно  $\vec{\xi}$  компоненты и найдя соответствующие компоненты угла отклонения, получим, что полный угол равен

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi} \quad (1.3.1)$$

Из уравнений (1.1.4), (1.3.1) и (1.2.4) получаем

$$\alpha(x) = \frac{m(|x|)}{x}, \quad (1.3.2)$$

где  $m(|x|) \equiv \frac{M(\xi_0|x|)}{\pi\xi_0^2\Sigma_{cr}}$  - безразмерная масса. Уравнение линзы в таком случае имеет вид

$$y = x - \frac{m(|x|)}{x} \quad (1.3.3)$$

### 1.4 Изображения

Рассмотрим протяженный источник, угловой размер которого много меньше углового размера линзы. Тогда для него можно составить якобиан отображения

$$\mathbb{A} \equiv \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (1.4.1)$$

где  $x_i$  это  $i$ -я компонента вектора  $\vec{x}$  в плоскости линзы.

Обозначим  $\frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \Psi_{ij}$ .

Вычтем из матрицы  $\mathbb{A}$  диагональную часть:

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{A} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbb{A} \cdot \mathbb{I} \right)_{ij} &= \delta_{ij} - \Psi_{ij} - \frac{1}{2}(1 - \Psi_{11} + 1 - \Psi_{22})\delta_{ij} \\ &= -\Psi_{ij} + \frac{1}{2}(\Psi_{11} + \Psi_{22})\delta_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) & -\Psi_{12} \\ -\Psi_{12} & \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Полученная бесследовая антисимметричная матрица называется матрицей сдвига и описывает искажение изображения гравитационным полем.

Введем псевдовектор сдвига  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$  такой, что

$$\begin{aligned} \gamma_1(\vec{x}) &= \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \\ \gamma_2(\vec{x}) &= \Psi_{12} = \Psi_{21} \end{aligned}$$

Тогда существует такой поворот системы на угол  $\phi$ , что

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

Диагональная часть якобиана равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbb{A} &= \left[ 1 - \frac{1}{2}(\Psi_{11} + \Psi_{22}) \right] \delta_{ij} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta \Psi \right) \delta_{ij} = (1 - k) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Таким образом, якобиан имеет вид

$$\mathbb{A} = (1 - k)\mathbb{I} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

Первое слагаемое (сходимость) в этой сумме отвечает за масштабирование, однородное растяжение или сжатие изображения, а второе (сдвиг) за растяжение вдоль определенного направления (определенного псевдовектором сдвига). В частности, круглый источник малого размера будет преобразован в эллипс.

Поскольку суммарный световой поток сохраняется, а телесный угол, от которого он приходит, изменяется, яркость изображений увеличивается (или уменьшается) по сравнению с источником. Коэффициент усиления, очевидно, равен

$$\mu \equiv \det \mathbb{M} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} = \frac{1}{(1 - k)^2 - \gamma^2} \quad (1.4.3)$$

где  $\mathbb{M}$  называется тензором усиления. Уравнение

$$(1 - k)^2 - \gamma^2 = 0 \quad (1.4.4)$$

задает две критические кривые, на которых усиление формально бесконечно: радиальную  $(1 - k + \gamma = 0)$  и тангенциальную  $(1 - k - \gamma = 0)$ . Изображения вблизи радиальной кривой растягиваются поперек нее, а изображения вблизи тангенциальной кривой растягиваются вдоль нее.

## 2 Темная материя в Галактике

### 2.1 Профиль Наварро-Френка-Уайта

Первые попытки описать распределение темной материи в галактиках и скоплениях использовали модель изотермической сферы, описывающей вещества галактики как идеальный газ в термодинамическом равновесии. При таком подходе вне центрального ядра постоянной плотности плотность  $\rho \propto r^{-2}$ , где  $r$  это расстояние до центра системы.

С появлением мощных компьютеров стало возможным детальное моделирование структуры и эволюции звездных систем, что позволило получить более точное математическое описание распределения массы в галактиках. К середине 1990-х накопилось большое число нестыковок и противоречий в результатах моделирования, свидетельствовавших, что модель изотермической сферы неудовлетворительна. В 1995 году публикуется статья Джоулио Наварро, Карлоса Френка и Саймона Уайта [5], в которой предлагается новая модель, получившая название “профиль Наварро-Френка-Уайта”:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (2.1.1)$$

где  $r_s$  и  $\rho_s$  - масштабный радиус и характеристическая плотность конкретного объекта. Это распределение дает (при  $\xi_0 = r_s$ ) следующее выражение для поверхностной плотности [10]:

$$\Sigma(x) = \frac{2\rho_s r_s}{x^2 - 1} f(x), \quad (2.1.2)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & (x > 1) \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & (x < 1) \\ 0 & (x = 1). \end{cases}$$

Соответствующий приведенный угол отклонения

$$\alpha(x) = \frac{4k_s}{x} h(x), \quad (2.1.3)$$

где

$$k_s \equiv \rho_s r_s \Sigma_{cr}^{-1} \quad (2.1.4)$$

и

$$h(x) = \ln \frac{x}{2} + 1 - f(x) \quad (2.1.5)$$

Соответствующее уравнение линзы имеет два режима. При малых  $y$  имеется три решения - одно слегка смещенное относительно  $y$  и два по другую сторону оптической оси. С увеличением  $y$  “отрицательные” решения сближаются, а затем сливаются и исчезают, оставляя только одно изображение.

Эти режимы называются сильным линзированием и слабым линзированием соответственно.

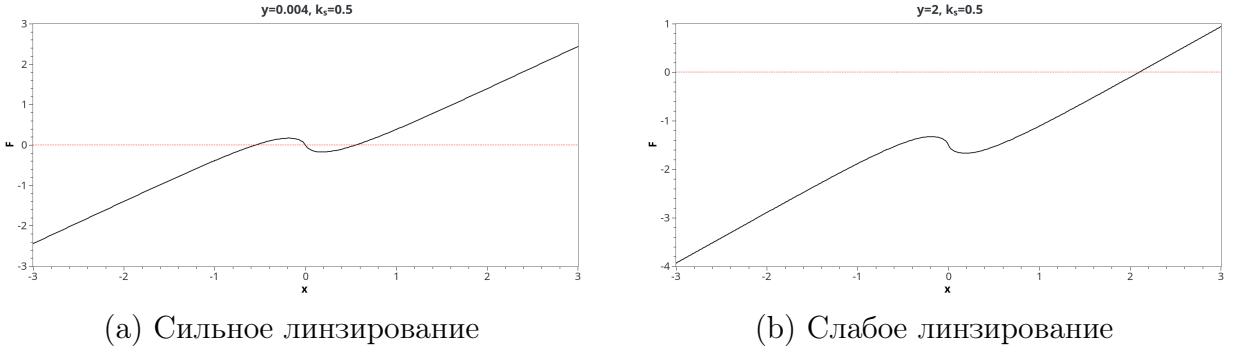


Рис. 2: Режимы решений уравнения линзы для  $k_s = 0.5$

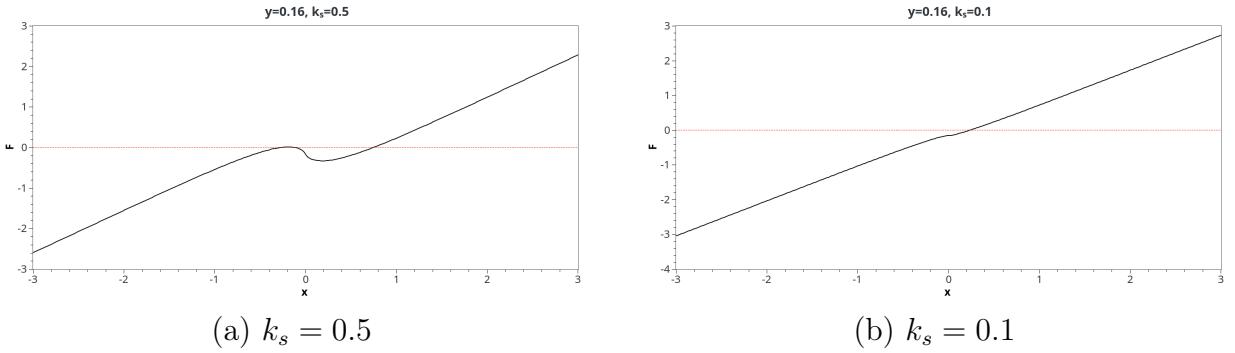


Рис. 3: Зависимость вида решения от величины характеристической сходимости

## 2.2 Темные гало

Уже в статье Наварро, Френка и Уайта было отмечено, что количество темной материи в карликовых галактиках аномально высоко. Более поздние исследования и наблюдения подтверждают это [9]. Логично предположить, что должны существовать объекты, по массе сравнимые с карликовыми галактиками или менее массивные, в которых барионного вещества, а тем более звезд, так мало, что обнаружить их с помощью прямых наблюдений почти невозможно. Такие объекты (темные гало или субгало) должны были образовываться в значительных количествах при формировании галактик [8], поскольку неоднородности малого масштаба начали схлопываться раньше, чем большого. Теоретически, такие сгустки темной материи могут иметь массы от субзвездных до  $10^{10} M_\odot$ . Действительно, высокоточные симуляции формирования галактик типа Млечного Пути показывают, что хотя большинство массивных субгало к настоящему моменту почти полностью “растворены” в однородной части гало в результате потери массы за счет взаимодействия друг с другом и с центральной частью Галактики, число ядер темной материи с массами порядка  $10^7 M_\odot$  и выше, особенно во внешних областях, все равно в два-три раза превышает [7] число наблюдаемых карликовых спутни-

ков Галактики.

Основные надежды в поисках субгало возлагаются на обнаружение гамма-лучей, порождаемых при аннигиляции частиц темной материи [2]. Однако крупные субгало должны помимо этого оставлять следы в виде гравитационного линзирования объектов фона, например галактик или крупных звездных скоплений в Местной группе. Поскольку масса и размер темных гало достаточно малы, а размеры оптической системы относительно невелики, характеристическая сходимость настолько мала ( $k_s \ll 1$ ), что для них реализуется только слабое линзирование, то есть изображение фонового источника лишь несущественно искажается, но не возникает дополнительных изображений или заметных дуг, что серьезно затрудняет поиски.

Рассчеты показывают [1], что большие оси субгало направлены в основном в сторону галактического центра, что, вообще говоря, означает, что для произвольного гало использование аксиально симметричной модели при наблюдении с Земли неправомерно. Однако согласно компьютерным симуляциям субгало в среднем обладают высокой сферичностью [1], а значит по крайней мере в режиме слабого линзирования можно спокойно использовать профиль Наварро-Френка-Уайта для сферически симметричной линзы.

Используя известные диапазоны значений концентраций и масс субгало [3], а также порядок больших полуосей их орбит, можно получить оценку разрешающей способности, необходимой для обнаружения линзирования в идеализированном случае, что и сделано ниже.

### 3 Оценка смещения изображений

В распределении Наварро-Френка-Уайта

$$\begin{aligned}\rho_s &= \delta_c \rho_c \\ \rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \\ \delta_c &= \frac{200}{3} \frac{c^3}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \\ r_s &= \frac{r_{200}}{c} \\ r_{200} &= \sqrt[3]{\frac{GM_{200}}{100H^2}}\end{aligned}$$

Здесь  $\rho_c$  - критическая плотность Вселенной,  $r_{200}$  - радиус, внутри которого средняя плотность вещества в 200 раз выше критической,  $H$  - Хаббловский параметр,  $G$  - гравитационная постоянная.

Отсюда

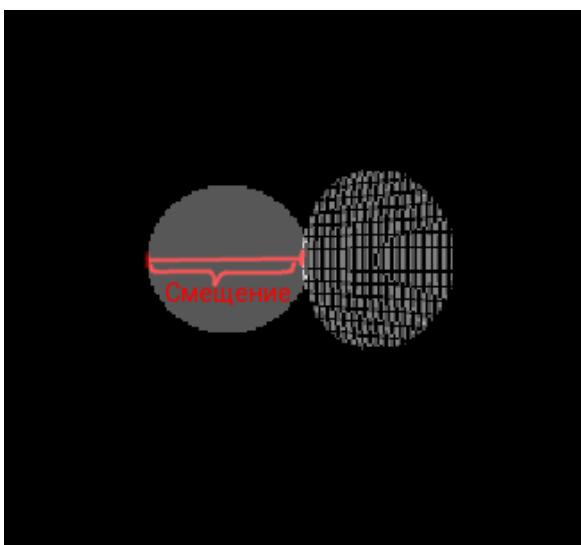
$$k_s = \frac{\rho_c \delta_c r_s}{\Sigma_{cr}} = \frac{D_L D_L S}{D_S c_0^2} \frac{10 H c^2}{\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}} \sqrt[3]{10 G H M_{200}} \quad (3.0.1)$$

где  $c_0$  - скорость света.

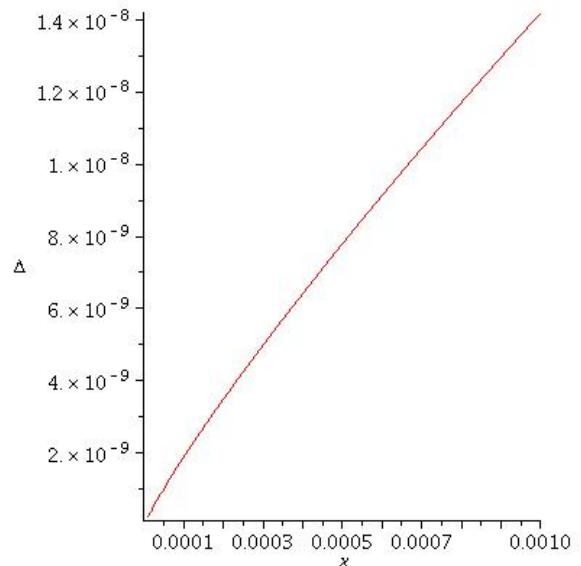
При  $M_{200} = 10^7 M_\odot$ ,  $D_L = 0.25 Mpc$ ,  $D_S = 2.5 Mpc$ ,  $c = 10$ ,  $H = 2 \cdot 10^{-18} sec^{-1}$  имеем  $k_s \sim 10^{-6}$  и  $r_s \sim 10^{19} m$ .

Определим смещение  $\Delta$  как расстояние на плоскости  $\mathbf{L}$ , на которое сдвигается изображение источника в результате линзирования. В безразмерном виде

$$\Delta = |y - x| = |\alpha(x)| \quad (3.0.2)$$



(a) Пример смещения изображения ( $k_s = 0.5$ ,  $y_{centre} = 2.4$ )



(b) Зависимость смещения от  $x$  при малых  $y$  ( $k_s = 10^{-6}$ )

При этом угловое смещение будет равно

$$\Delta\Theta = \frac{\xi_0}{D_L} \Delta = \frac{r_s}{D_L} \Delta \quad (3.0.3)$$

Очевидно, что для обнаружения линзирования смещение должно как минимум превышать разрешающую способность телескопа.

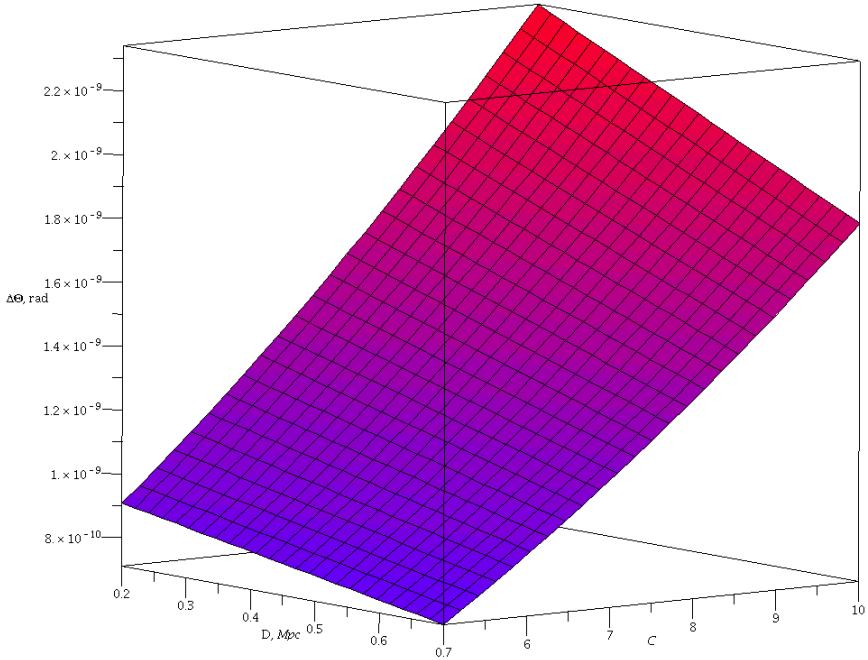


Рис. 5: Зависимость углового смещения от расстояния до субгало и концентрации при  $y \simeq 0.001$

Для объектов массой порядка  $10^7 M_\odot$  значения углового смещения составляют порядка  $10^{-9}$  радиана или  $10^{-4}$  угловой секунды. Для более массивных и плотных субгало угловое смещение может достигать нескольких сотых секунды дуги, что технически находится в области доступности для современных телескопов [14]. Тем не менее, вероятность обнаружить темное гало таким способом мала. Во-первых, число субгало массой не меньше  $10^7 M_\odot$  в гало Млечного пути оценивается в несколько сотен, а поскольку число субгало с увеличением массы убывает по степенному закону [2], то массивные объекты составляют от этого количества лишь небольшую долю. Во-вторых, то, что такой объект окажется практически точно на линии наблюдения подходящего источника, крайне маловероятно ввиду малых угловых размеров и небольшого количества объектов. Таким образом, ожидать обнаружения субгало в Млечном пути по слабому линзированию по крайней мере в ближайшее время не стоит.

## 4 Заключение

В работе получена порядковая оценка смещения изображений, вызываемого линзированием на предполагаемых неоднородностях темной материи в гало Млечного пути в приближении сферической модели Наварро-Френка-Уайта.

Полученные значения показывают, что наблюдение непосредственного линзирования на субгало рассматриваемой категории представляется маловероятным, хотя и возможным.

## Список литературы

- [1] *Alexander Knebe, Nadya Draganova, Chris Power, Gustavo Yepes, Yehuda Hoffman, Stefan Gottlöber, Brad K. Gibson* On the relation between radial alignment of dark matter subhalos and host mass in cosmological simulations, arXiv:0802.1917v1 [astro-ph]
- [2] *H.-S. Zechlin, M. V. Fernandes, D. Elsaesser, D. Horns* Dark matter subhaloes as gamma-ray sources and candidates in the first Fermi-LAT catalogue, arXiv:1111.3514v2 [astro-ph.HE]
- [3] *Chiamaka Okoli* Dark matter halo concentrations: a short review, arXiv:1711.05277v1 [astro-ph.CO] 14 Nov 2017
- [4] *Candace Oaxaca Wright, Tereasa G. Brainerd* Gravitational Lensing by NFW Halos, arXiv:astro-ph/9908213v1
- [5] *Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, Simon D.M. White* The Structure of Cold Dark Matter Halos, astro-ph/9508025 7 Aug 1995
- [6] *Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr., Norbert Thonnard* ROTATIONAL PROPERTIES OF 21 Sc GALAXIES WITH A LARGE RANGE OF LUMINOSITIES AND RADII, FROM NGC 4605 ( $R = 4$  kpc) TO UGC 2885 ( $R = 122$  kpc), The Astrophysical Journal, 238:471-487, 1980 June 1
- [7] *Piero Madau, Jurg Diemand, Michael Kuhlen* Dark matter subhalos and the dwarf satellites of the Milky Way, arXiv:0802.2265v3 [astro-ph] 21 Feb 2008
- [8] *J. D. EMBERSON, TAKESHI KOBAYASHI, MARCELO A. ALVAREZ* EVOLUTION OF LOW MASS GALACTIC SUBHALOS AND DEPENDENCE ON CONCENTRATION, arXiv:1504.00667v2 [astro-ph.CO] 12 Oct 2015
- [9] *Ewa L. Lokas* Dark matter in dwarf galaxies of the Local Group, arXiv:1112.0438v1 [astro-ph.CO] 2 Dec 2011
- [10] *Massimo Meneghetti*, Introduction to Gravitational Lensing (lecture scripts)
- [11] *Erik Zackrisson, Teresa Riehm* Gravitational lensing as a probe of cold dark matter subhalos, arXiv:0905.4075v2 [astro-ph.CO] 1 Oct 2009
- [12] *H. S. Dúmet – Montoya, G. B. Caminha, M. Makler*, Analytic solutions for Navarro-Frenk-White lens models in the strong lensing regime for low characteristic convergences; Astronomy and Astrophysics 560

- [13] *A. Ф. Захаров*, Гравитационные линзы и микролинзы; Янус-К, 1997 (ISBN 5-88929-037-1)
- [14] <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/science-performance>